

LES HARMONIQUES ET LA JUSTESSE

Les notes produites en harmoniques sont pour certaines très différentes des notes frettées. Nous allons voir, en partant d'une note de base (fondamentale), comment se calculent les fréquences des notes frettées et des notes harmoniques, pour pouvoir les comparer.

Les frettes sont disposées sur le manche pour que tous les demi-tons d'une corde soient identiques. C'est ce que l'on appelle le tempérament égal, qui est utilisé sur tous les instruments modernes à notes fixes, dont l'interprète ne peut pas moduler la hauteur en cours de jeu (piano, guitare, harpe, accordéon, vibraphone, basse électrique...).

Les notes ou intervalles frettés sont dits « tempérés »¹, les notes ou intervalles des harmoniques sont dits « purs ».

1 – Le demi-ton égal

Voyons comment calculer mathématiquement la « valeur » d'un demi-ton.

Il faut déjà savoir que le passage d'une note à une autre revient à **multiplier** (ou **diviser**) sa fréquence, et non à additionner ou soustraire.

Par exemple, monter d'une octave revient à **multiplier** la fréquence par 2 (voir « le secret des harmoniques »). Monter d'une tierce majeure « pure » revient à **multiplier** la fréquence par 5 et à **diviser** par 4 pour redescendre de 2 octaves.

La fréquence s'exprime en Hz (Hertz, nombre de vibrations par seconde).

Le La de référence (La₃) le plus couramment utilisé a une fréquence de 440Hz.²



¹ C'est un abus de langage : il existe beaucoup d'autres tempéraments que le tempérament égal, qui utilisent des demi-tons inégaux pour se rapprocher des notes pures, mais qui sonnent différemment selon la tonalité utilisée.

² Les chiffres en indice des notes représentent le numéro de l'octave. Voir à la fin du document.

Par quel facteur faut-il multiplier une fréquence pour monter d'un demi-ton tempéré ?

Il y a 12 demi-tons dans une octave ; monter douze fois d'un demi-ton, c'est multiplier douze fois par le facteur recherché. Et cela doit revenir à multiplier par deux, puisqu'on monte d'une octave.

Si on nomme Z le facteur en question, on a donc

$Z \times Z \times Z \times Z \times Z \times Z \times Z \times Z \times Z \times Z \times Z \times Z$ doit valoir 2 ;

Soit $Z^{12} = 2$,

Soit encore $Z = 2^{1/12}$, ou encore $Z = \sqrt[12]{2}$ (racine douzième de 2).



Ce qui, traduit par ma calculatrice, donne

$$Z \approx 1,0595^3$$

Nous pouvons maintenant calculer les fréquences de toutes les notes tempérées sur la guitare.

2 - Calcul du La grave (corde ⑤)

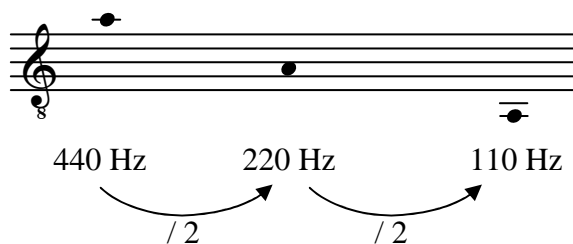
Commençons par un rappel : la guitare est un instrument transpositeur, qui sonne une 8^{ve} plus

bas que ce qui est écrit (C'est pourquoi on utilise souvent la clef  au lieu de ).

Donc le La₃ du diapason est, sur une partition de guitare :



corde ⑤, case V.



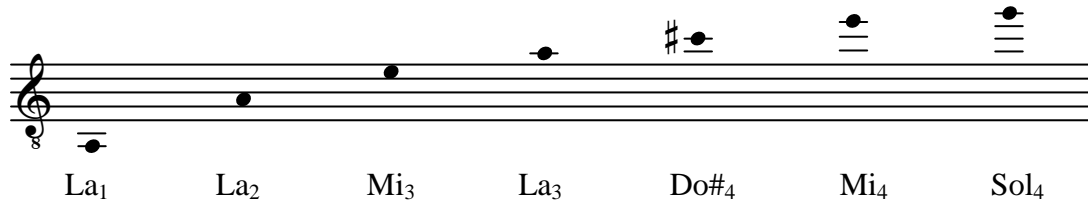
Nous pouvons calculer toutes les notes que nous voulons, en multipliant ou en divisant autant de fois que nécessaire par Z (une fois pour chaque demi-ton d'écart).

Nous allons calculer celles qui nous intéressent le plus, qui correspondent aux **harmoniques de la corde de La**, pour pouvoir comparer les notes tempérées aux notes pures.

³ Monter d'un demi-ton revient donc à augmenter la fréquence de 5,95 %.

3 – Comparaison tempéré / pur

Nous allons donc calculer :



- $La_1 = 110\text{Hz}$.
- $La_2 = 110 \times Z^{12} = 110 \times 2 = 220 \text{ Hz}$.
Evidemment, pas de différence entre l'octave tempérée ($\times Z^{12}$) et l'octave pure ($\times 2$).
- Mi_3 est une octave + une quinte au-dessus de La_2 , soit une octave + 7 demi-tons.
 $Mi_3 = 110 \times 2 \times Z^7 = 110 \times 2 \times 2^{7/12} = 329,63 \text{ Hz}$
On peut comparer au Mi_3 pur, harmonique de rang 3, donc fréquence multipliée par 3 :
 $Mi_3 \text{ pur} = 110 \times 3 = 330 \text{ Hz}$.

On n'est pas loin, mais la différence s'entend légèrement. Le Mi aigu à vide (tempéré) doit donc être très légèrement plus grave que l'harmonique VII de la corde ⑤...

- $La_3 = 110 \times Z^{24} = 110 \times 2^2 = 110 \times 4 = 440 \text{ Hz}$: sans surprise ...
- $Do\#_4$: 2 octaves + une tierce majeure, soit 2 octaves (on multiplie par 4) + 4 demi-tons (on multiplie 4 fois par Z).
 $Do\#_4 = 110 \times 4 \times Z^4 = 440 \times 2^{4/12} = 554,37 \text{ Hz}$.
Comparons au $Do\#_4$ pur, harmonique de rang 5, donc fréquence multipliée par 5 :
 $Do\#_4 \text{ pur} = 110 \times 5 = 550 \text{ Hz}$

L'écart est beaucoup plus important que pour la quinte. Le $Do\#$ fretté est beaucoup plus haut que le $Do\#$ harmonique. La différence entre les tierces majeures pure et tempérée est une des principales critiques que l'on peut faire au tempérament égal. La plupart des autres tempéraments utilisés (en usage jusqu'au début du 19^{ème} siècle) divisaient l'octave en demi-tons inégaux, un des objectifs étant d'utiliser une tierce majeure plus proche de l'intervalle pur.

- Mi_4 : on va retrouver, proportionnellement, la même différence que pour le Mi_3 , c'est-à-dire légèrement audible.

- Sol₄ : 2 octaves + une septième mineure au-dessus, soit 2 octaves + 10 demi-tons :
 $\text{Sol}_4 = 110 \times 4 \times 2^{10} = 440 \times 2^{10/12} = \mathbf{783,99 \text{ Hz}}$
 Comparons au Sol pur, harmonique de rang 7, donc fréquence multipliée par 7 :
 $\text{Sol}_4 \text{ pur} = 110 \times 7 = \mathbf{770 \text{ Hz}}$.

La différence est énorme. L'harmonique est seulement *proche* du sol, mais on ne peut, dans aucun tempérament, considérer l'harmonique de rang 7 comme une note juste.

BONUS : la numérotation des octaves

Diagram illustrating the French octave numbering system. The staff shows four octaves, each bracketed and labeled "Octave 1" through "Octave 4". The notes are labeled with solfège names: do₁, si₁, do₂, si₂, do₃, si₃, do₄, si₄, do₅. A box highlights the interval between si₃ and do₄.

Pour les guitaristes :

Diagram illustrating the guitar octave numbering system. The staff shows four octaves, each bracketed and labeled "Octave 1" through "Octave 4". The notes are labeled with solfège names: mi₁, do₂, si₂, do₃, si₃, do₄. A box highlights the interval between si₃ and do₄.

ATTENTION ! Cette numérotation est celle du système français. Le système américain, que l'on trouve sur de nombreux accordeurs ou diapasons, appelle A4 le La₃ français.